# Восстановление функций

*Лабораторная работа 3*. Восстановить функцию и построить её график:

1. Для тех, кто программирует, сделать интерполяцию кубическими сплайнами;
2. Всем, кто программирует и не программирует, сделать интерполяцию полиномом в форме Лагранжа через **WolframAlpha** (смотрите http://www.wolframalpha-ru.com/search?q=интерполяция);
   (Установите расширение VPN для вашего браузера «Hola VPN для…»)
3. Всем сделать приближение (аппроксимация, регрессия) методом наименьших квадратов с помощью **WolframAlpha**. Оценить качество по коэффициенту детерминации.

## Дискретно заданная функция и её восстановление. Интерполяция

Восстановить функцию $f(x)$, заданную дискретно по точкам:

| $i =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $f =$ | 0.6 | 2,3 | 2,1 | 3,5 | 4,2 | 6 | 7,8 | 6,2 |

Интерполирование алгебраическим многочленом

Приближ. восстановление ф-ции $f(x)$ нек-рым многочленом $L_n(x)$ так, что

$$f(x) \approx L_n(x), \quad x \in [a, b]$$

при

Условие интерполирования:

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad x_0 = a, \; x_n = b.$$

называется интерполяцией.

Зададим интерп. многочлен степени $n$:

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Восстановление за пределами отрезка – **экстраполяция**.

Интерполяционный многочлен в **форме Лагранжа**

Для произвольного $n$ получаем многочлен: (из анализа ф-л $L_1$ и $L_2$)

вместо $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i =$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n} c_i(x) f_i}, \qquad (3)$$

— инт. многочлен Лагранжа
удобно применять на практике

где $c_i(x) = \dfrac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}$, — коэф. Лагранжа

Линейный: $L_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$

Квадратичный:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

Плохая сходимость – пример
http://tolstykh.com/Calculations/Interpolations/index.htm

Плохая сходимость интерполяции по Лагранжу:

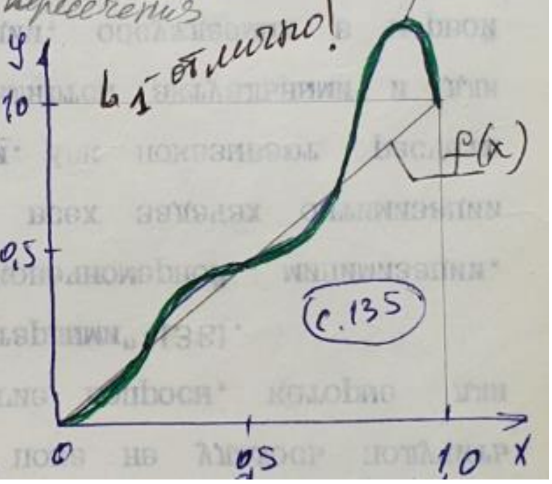
⇒ $L_n(x)$ – осциллирующая кривая, кривые высоких порядков имеют осцилл. хар-р,
например $y = x^4$ ⇒ 4 пересечения


Классич. пример

Интерпол. многочлен $L_8(x)$

для $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$:

$L_n$ – никогда не сходится при $n \to \infty$,
кроме 3-х точек $-1, 0, +1$.




⇒ общее утверждение:

# Интерполирование **кубическими сплайнами**

См. формулы https://ru.wikipedia.org/wiki/

разделы: Сплайн - Кубический сплайн. Интерполяция кубическим сплайном

Сплайн-функция (сплайн) - это кусочно-полиномиальная ф-ция, определённая на отр. $[a, b]$ и имеющая на этом отрезке нек-рое число непрерывных производных.

Преимущества 1. - сходимость сплайнов к $f(x)$;
2. - устойчивость процесса вычислений (вычислит. погрешности не накапливаются).

Кубический интерполяционный полином $S(x)$ "ИКС"

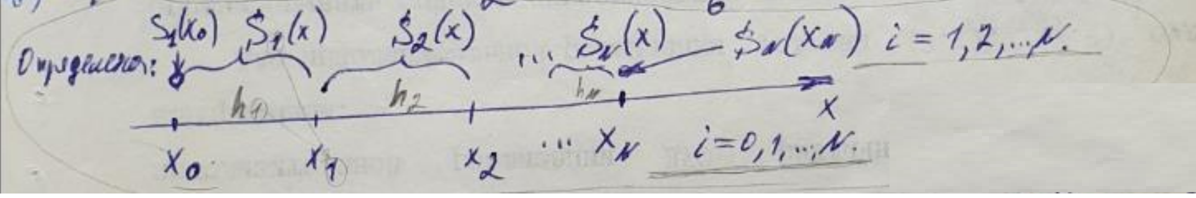
1 - на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots N$, ф-ция $S(x)$ - многочлен 3-й степени;

2 - ф-ция $S(x)$, её 1-я и 2-я производные непрерывны на $[a, b]$;

3 - $S(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,\ldots N$ - условие интерполирования:

На каждом отрезке $h_i = x_i - x_{i-1}$ будем искать ф-цию $S_i(x)$:

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x-x_i)^3, \quad i=1,2,\ldots,N. \quad (4)$$




Надо найти $4N$ коэффициентов $a_i, b_i, c_{i,}, d_i$:

из усл. интерполир. => $a_i = f_i$, $i = 0,1,2,\ldots,N$

$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$ $\qquad h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,N.$

$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ $\qquad c_{i+1} h_{i+1} - \frac{d_{i+1}}{2} h_{i+1}^2 = b_{i+1} - b_i$

$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ $\qquad d_i h_i = c_i - c_{i-1}$,

Сначала находим С:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad i=1,\ldots,N-1.$$

$c_0 = c_N = 0.$

Коэф. системы (8) образуют 3-х диаг. матрицу:

$i=1$: $\quad ..c_0 + ..c_1 = \dots$

$i=2$: $\quad ...c_0 + ...c_1 + ...c_2 = \dots$

$i=3$: $\quad ...c_1 + ...c_2 + ...c_3 = \dots$

$i=N-1$: $\quad ...c_{N-2} + ...c_{N-1} + ...c_N = \dots$

$i=N$: $\quad ...c_{N-1} + ...c_N = \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & \emptyset & \\ & 1 & 2 & 3 & & \\ & & & \ddots & & \\ \emptyset & & & N-2 & N-1 & N \\ & & & & N-1 & N \end{pmatrix}$$

Строки (и столбцы) такой матрицы – линейно независимы $\Rightarrow \det \neq 0$

$\Rightarrow$ система (8) имеет единств. решение.

Системы с 3-х диаг. матрицами решаются методом прогонки.

## Сходимость процесса интерполирования кубическими ~~сп~~ сплайнами

$\exists$ Т. о равном. сходимости для равном. сетки $h_i = h = \text{const}\ \forall i$.

Погрешности интерп. для $S, S', S''$:

$$r^{(l)}(x) = f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x), \quad l = 0, 1, 2.$$

Т. Для $f \in C^4[a,b]$ справедливы оценки

$$\boxed{\| r^{(l)}(x) \|_{C[a,b]} \leq M h^{4-l}}, \quad 0 < M < \infty, \quad l = 0, 1, 2.$$

$\Rightarrow$ при $h \to 0$ (т.е. $N \to \infty$) погрешность $r^{(l)} \to 0$ равномерно.

Примеры интерполяций, сделанные нашими студентами:

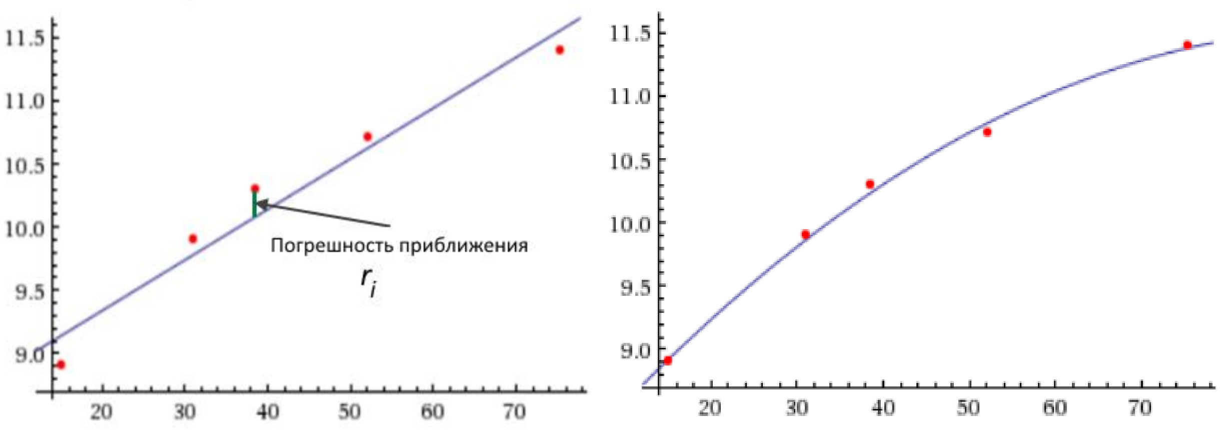
https://tolstykh.com/Calculations/Interpolations/index.htm

# Приближение

## (аппроксимация, регрессия) МНК

Рекомендации: аппроксимация функций в Wolfram|Alpha – [http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_18.html](http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_18.html)
(Установите расширение VPN для вашего браузера «Hola VPN для…»)

Когда есть погрешности, то делать интерполяцию некорректно.




**Модели** функций приближения (**уравнение регрессии**):

— линейная (слева), квадратичная (справа)….

$r_i$ — ошибки, остатки регрессии.

**МНК** (метод наименьших квадратов) – определение коэффициентов структуры модели из условия минимума квадратов всех погрешностей (ошибок) приближения:

$$\sum_{1}^{n} {r_i}^2 \to min.$$

Качество модели определяется **Коэффициентом детерминации** — доля дисперсии функции, объясняемая рассматриваемой моделью (насколько уравнение регрессии соответствует реальным данным):

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{tot}^2}, \qquad 0 \le R^2 \le 1,$$

$\sigma^2 = \sum_1^n {r_i}^2$ — дисперсия ошибки $r$ модели (сумма квадратов остатков регрессии),

$\sigma_{tot}^2 = \sum_1^n \left(f_i - \bar{f}\right)^2$— общая дисперсия (общая сумма квадратов) модели $f$,

$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_1^n f_i$ — среднее значение.

По $R^2$ можно сравнивать качество разных моделей восстановленной функции.

## Примеры:

Введите в строку https://www.wolframalpha.com/

fit {15.2,8.9},{31.1,9.7},{38.6,10.4},{52.2,10.6},{75.4,11.5} => три модели

cubic fit {{15.2, 8.9}, {31.1, 9.7}, {38.6, 10.4}, {52.2, 10.6}, {75.4, 11.5}}